

Об интерпретации Фон-Дер-Флаасса экстремальных примеров для (3,4)-проблемы Турана

А. А. Разборов*

1 октября 2010 г.

Аннотация

В 1941 г. Туран предположил, что любой 3-граф, не содержащий независимых множеств на 4 вершинах (такие графы в дальнейшем будут называться *(3,4)-графами*) обязан иметь плотность рёбер $\geq 4/9(1 - o(1))$ и построил первый пример бесконечной серии 3-графов с такой плотностью. Браун (1983) и Косточка (1982) нашли целый ряд других примеров с этим свойством. Фон-Дер-Флаасс (1988) предложил общую конструкцию, позволяющую превратить произвольный ориентированный граф Γ без индуцированных циклов $\vec{C}_4$ в $(3,4)$ -граф Турана. Им было замечено, что все примеры Турана-Брауна-Косточки можно получить с помощью его конструкции, а также была доказана нижняя оценка $\geq 3/7(1 - o(1))$ на рёберную плотность любого $(3,4)$ -графа Турана, получаемого таким образом.

В настоящей работе мы доказываем оптимальную нижнюю оценку $4/9(1 - o(1))$ на рёберную плотность любого $(3,4)$ -графа Турана, строящегося с помощью конструкции Фон-Дер-Флаасса при выполнении любого из следующих двух ограничений на неориентированный остов G орграфа Γ :

- G является полным многодольным графом;

*Чикагский Университет и Математический Институт РАН им. В. А. Стеклова.
Работа частично выполнена при поддержке РФФИ.

- G имеет плотность рёбер не ниже $(2/3 - \epsilon)$, где $\epsilon > 0$ – некоторая абсолютная константа.

Без дополнительных ограничений на Γ мы в состоянии усилить оценку Фон-Дер-Флаасса до значения $7/16(1 - o(1))$.

1 Введение

В классической работе [10] Мانتель вычислил минимально возможное количество рёбер в графе G с данным числом вершин, обладающего тем свойством, что никакие три вершины не являются независимыми, т.е. содержат хотя бы одно соединяющее их ребро. В статье [17] (по существу положившей начало всей области экстремальной комбинаторики) Туран обобщил результат Мантеля на случай независимых множеств любого размера. В той же работе Туран поставил вопрос о дальнейшем обобщении полученных результатов на случай гиперграфов, и с тех пор вопросы такого рода приобрели слегка зловещую репутацию одних из наиболее трудных и не поддающихся решению проблем во всей дискретной математике.

Более точно, для семейства $\mathcal{H}$ r -однородных гиперграфов (которые в дальнейшем будут называться просто r -графами) и натурального числа n обозначим через $\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})$ минимальное количество рёбер в n -вершинном r -графе, не содержащем индуцированных копий никакого $H \in \mathcal{H}$. Пусть также

$$\pi_{\min}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})}{\binom{n}{r}}$$

(легко видеть, что этот предел всегда существует).

Для $\ell > r \geq 2$ обозначим через I_ℓ^r пустой r -граф на ℓ вершинах. Значения $\pi_{\min}(I_\ell^r)$ (не говоря уже про точные значения $\text{ex}_{\min}(n; I_\ell^r)$) до сих пор неизвестны *ни для какой* пары $\ell > r \geq 3$, хотя для многих таких пар имеются правдоподобные гипотезы [16]. Наиболее простой нерешённый случай $r = 3$, $\ell = 4$ в то же самое время является наиболее часто встречающимся в литературе; задачу определения величины $\pi_{\min}(I_4^3)$ иногда называют *(3, 4)-проблемой Турана* (см., например, [7]). Бесконечное семейство 3-графов, подтверждающее верхнюю оценку $\pi_{\min}(I_4^3) \leq 4/9$ было построено самим Тураном; он также предположил, что эта оценка является точной. В серии работ Де Каена [3], Жиро (Giraud, unpublished),

Чанг и Лу [4] были установлены нижние оценки на $\pi_{\min}(I_4^3)$; рекордной в настоящее время является оценка

$$\pi_{\min}(I_4^3) \geq 0.438334$$

[15]. Стоит, впрочем, отметить, что последняя оценка представляет собой численный результат решения некоторой задачи полуопределённого программирования, естественным образом связанной с $(3, 4)$ -проблемой Турана. Наилучшей оценкой, для которой известно полностью “человеческое” доказательство по-прежнему остаётся оценка

$$\pi_{\min}(I_4^3) \geq \frac{9 - \sqrt{17}}{12} \geq 0.406407$$

из работы [4].

В работе [15] было также доказано, что $\pi_{\min}(I_4^3, G_3) = 4/9$, где G_3 — это 3-граф на 4 вершинах с 3 рёбрами. Помимо I_4^3 построенные Тураном 3-графы также не содержали в качестве индуцированного подграфа G_3 . Пигурко [12] доказал, что с асимптотической точки зрения примеры Турана являются *единственными* 3-графами, на которых достигается равенство $\pi_{\min}(I_4^3, G_3) = 4/9$.

Одним из наиболее перспективных подходов к решению любой экстремальной задачи является изучение структуры множества (предположительно) экстремальных конфигураций. И одной из многих трудностей, связанных с $(3, 4)$ -проблемой Турана, как раз и является тот факт, что это множество (которое в терминологии работы [13] суть множество всех гомоморфизмов из $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})$, для которых $\phi(\rho_3) = 4/9$) устроено крайне сложно и, в частности, некоторым естественным способом параметризовано семейством всех вероятностных распределений на $\mathbb{R}$. Эти примеры (предположительно) экстремальных конфигураций были построены в работах Брауна [2] и Косточки [7], и единственная (насколько нам известно) попытка их объяснения в независимых терминах была предпринята Фон-Дер-Флаассом в работе [1].

Более точно, зафиксируем ориентированный граф Γ (в дальнейшем просто *орграф*) без индуцированных (ориентированных) циклов $\vec{C}_4$. Следуя Фон-Дер-Флаассу, определим 3-граф $FDF(\Gamma)$ с тем же множеством вершин, в котором тройка (a, b, c) включается в список рёбер тогда и только тогда, когда индуцированный орграф $\Gamma|_{\{a, b, c\}}$ изоморфен одному из четырёх орграфов $I_3, \vec{P}_3, \vec{K}_{1,2}, \vec{T}_3$ на рис. 1. В короткой заметке [1] Фон-

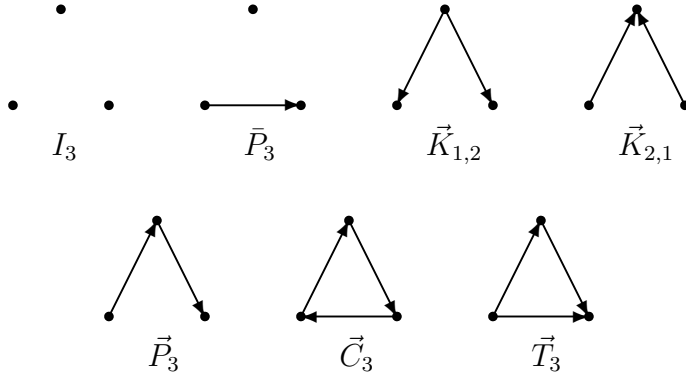


Рис. 1: Простые оргграфы на 3 вершинах

Дер-Флаассом были установлены следующие замечательные факты:

1. если оргграф Γ не содержит индуцированных копий $\vec{C}_4$, то 3-граф $FDF(\Gamma)$ не содержит копий I_4^3 ;
2. все известные экстремальные конфигурации из работ [17, 2, 7] имеют вид $FDF(\Gamma)$, где Γ принадлежит некоторому специальному классу ориентаций почти сбалансированного полного трёхдольного графа;
3. для всякого оргграфа Γ без индуцированных копий I_4^3 3-граф $FDF(\Gamma)$ имеет плотность рёбер $\geq 3/7(1 - o(1))$.

Вопрос об усилении оценки из пункта 3 до оптимального значения $\geq 4/9(1 - o(1))$, на который мы будем ссылаться как на *гипотезу Фон-Дер-Флаасса*¹, в настоящий момент открыт, и это именно тот вопрос, изучению которого посвящена настоящая работа.

Получить полное решение гипотезы Фон-Дер-Флаасса нам пока, к сожалению, получить не удалось. Наш основной результат (теорема 2.3) подтверждает эту гипотезу при выполнении любого из двух нижеследующих дополнительных предположений:

¹здесь стоит отметить, что в работе [1] этот вопрос был задан в более неопределённой форме “остаётся неясным, достаточен ли такой зазор для построения на этом пути контрпримера к гипотезе Турана”

1. Γ является ориентацией некоторого полного многодольного графа (возможно, несбалансированного и, возможно, содержащего более, чем три доли);
2. Γ имеет плотность рёбер по крайней мере $2/3 - \epsilon$, где $\epsilon > 0$ – некоторая абсолютная константа.

Стоит отметить, что любое из этих двух предположений выполняется для ографов Γ , приводящим к примерам Турана-Брауна-Косточки и, стало быть, оба наших результата можно рассматривать как решение $(3, 4)$ -проблемы Турана для класса 3-графов, содержащего все известные экстремальные примеры и обладающего описанием в “достаточно инвариантных” терминах. Насколько нам известно, это первые результаты такого рода.

Любопытным образом наше второе ограничение (на плотность рёбер в Γ) выглядит точно так же, как и ограничение, использованное Ловасом и Шимоновичем в их ранней работе [8] по нижним оценкам на плотность треугольников в графе с данным числом рёбер (более сильные результаты в этом направлении были в дальнейшем получены в работах [5, 14, 11]). Более того, эта оценка является одним из отправных пунктов нашего доказательства (см. (7)), хотя мы были и не в состоянии провести более строгую аналогию между обоими доказательствами и используемыми в них идеях.

Помимо этого, из нашего результата вытекает, что если гипотеза Фон-Дер-Флаасса верна и все экстремальные конфигурации действительно имеют (асимптотически) плотность рёбер $2/3$, то эта гипотеза может быть в принципе доказана грубыми вычислительными методами наподобие использованных в [15]. Именно, при увеличении числа вершин ℓ в исследуемых графах нижняя оценка на плотность рёбер в Γ , при которой $FDF(\Gamma)$ может иметь рёберную плотность $4/9$, обязана стремиться к $2/3$. Стоит, впрочем, отметить, что в настоящий момент это наблюдение имеет чисто познавательную ценность: численное вычисление на 5 вершинах (на которых уже имеется 559 неизоморфных орграфов без индуцированных копий $\vec{C}_4$) даёт нижнюю оценку $2/3 - 1.3 \cdot 10^{-2}$. $1.3 \cdot 10^{-2}$, однако, существенно превышает любую нижнюю оценку на ϵ в теореме 2.3 б), которую при самых оптимистичных прогнозах можно надеяться получить с помощью наших методов.

Наши доказательства весьма существенно используют принцип двой-

ного суммирования, и они изложены на том же алгебро-аналитическом языке алгебр флагов, на котором они были найдены. В качестве побочного продукта мы автоматически (т.е., никак не используя леммы регулярности для гиперграфов) получаем “стабильные” варианты всех наших результатов. Иными словами, они остаются в силе, даже если допускаются индуцированные копии $\vec{C}_4$ (а также $\vec{P}_3$ в части, относящейся к полным многодольным графам); требуется лишь, чтобы их плотность не превышала $o(1)$. Мы предполагаем знакомство с основными понятиями из работы [13] и, не пытаясь дублировать основные определения, просто даём по мере надобности ссылки на соответствующие места в [13]. Кроме этого, мы постарались включить в работу достаточное число иллюстрирующих примеров и неформальных объяснений. Помимо прочего, это позволило нам включить ряд интересных наблюдений о примерах Турана-Брауна-Косточки, которые нелегко сформулировать в виде отдельных результатов, но которые, тем не менее, могут представлять определённый интерес для дальнейших исследований по $(3, 4)$ -проблеме Турана.

Статья построена следующим образом. В §2 мы приводим (в форме, адаптированной для наших целей) некоторые необходимые факты, по большей части заимствованные из предыдущих работ по $(3, 4)$ -проблеме Турана, а также формулируем наши основные результаты. Наше изложение прерывается введением в §2.1.1 некоторых дополнительных обозначений общего характера для теории алгебр флагов, а также перечислением в §2.1.2 всех конкретных объектов (теорий, типов, флагов и т.д.), используемых в данной работе. В §3 мы доказываем сравнительно несложное усиление оценки Фон-Дер-Флаасса до значения $7/16(1 - o(1))$ (без всяких дополнительных ограничений на Γ) и одновременно накапливаем материал, необходимый для доказательства нашего основного результата, теоремы 2.3. Сама эта теорема доказывается в §4. Статья завершается несколькими заключительными замечаниями в §5.

2 Предварительные сведения

3-однородные гиперграфы в дальнейшем будут называться просто *3-графами*. Для 3-графа H и натурального числа n обозначим через $ex_{\min}(n; H)$ минимальное количество рёбер в n -вершинном 3-графе, не содержащем

индуцированных копий H ; пусть также

$$\pi_{\min}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{\min}(n; H)}{\binom{n}{r}}$$

(хорошо известно, что этот предел всегда существует). В настоящей работе нас в основном интересует случай $\pi_{\min}(I_4^3)$, где I_4^3 – пустой 3-граф на 4 вершинах. *Турановским* будем называть 3-граф, не содержащий индуцированных копий I_4^3 . Ориентированный граф, или просто *орграф* – это направленный граф без петель, кратных рёбер и пар рёбер, соединяющих пару вершин в противоположных направлениях. Для орграфа Γ и множества его вершин $V \subseteq V(\Gamma)$ через $\Gamma|_V$ обозначается подграф, индуцированный на множество V . $\vec{C}_4$ – ориентированный цикл на 4 вершинах.

Настоящая работа целиком посвящена знаменитой $(3, 4)$ -проблеме Турана:

Определить значение $\pi_{\min}(I_4^3)$.

Мы начнём с того, что напомним (в удобных для нас терминах) строение множества известных (предположительно) экстремальных конфигураций [17, 2, 7, 1].

Положим $\Omega = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}$ и рассмотрим (бесконечный) орграф $\Gamma_K = (\Omega, E_K)$ с множеством вершин Ω , определяемый следующим образом:

$$E_K \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle (a, x), (b, y) \rangle \mid (x + y < 0 \wedge b = a + 1) \vee (x + y > 0 \wedge b = a - 1) \}.$$

Факт 1 Γ_K не содержит индуцированных копий $\vec{C}_4$.

Доказательство. Предположим противное. Всякий цикл длины 4 в Γ_K очевидно обязан иметь вид $(a, x_1), (a + 1, y_1), (a, x_2), (a + 1, y_2)$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}_3$. Однако в этом случае из $\langle (a, x_1), (a + 1, y_1) \rangle \in E_K$ и $\langle (a, x_2), (a + 1, y_2) \rangle \in E_K$ вытекает $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) < 0$, и, на основе аналогичного рассмотрения двух оставшихся рёбер, $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 > 0$. Противоречие. ■

Рассмотрим теперь (возможно, бесконечный) орграф $\Gamma = (V, E)$. Пусть $FDF(\Gamma)$ – 3-граф с множеством вершин V , в котором тройка (u, v, w) объявляется ребром в том и только том случае, когда $\Gamma|_{\{u, v, w\}}$ либо содержит изолированную вершину либо содержит вершину выходящей степени 2.

Факт 2 ([1]) Если Γ не содержит индуцированных $\vec{C}_4$, то $FDF(\Gamma)$ является турановским.

Фиксируем теперь конечное подмножество $S \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $x + y \neq 0$ для всяких $x, y \in S$.

Факт 3 ([1]) Рёберная плотность 3-графа $FDF(\Gamma_K|_{\mathbb{Z}_3 \times S})$ стремится к $4/9$ при условии $|S| \rightarrow \infty$.

Из фактов 1-3 немедленно вытекает верхняя оценка $\pi_{\min}(I_4^3) \leq 4/9$. Исходный пример Турана [17] соответствует случаю, когда все элементы S положительны. В примере Брауна [2] отрицательные элементы в S допускаются, но по модулю они обязаны быть меньше любого положительного элемента. Наконец, примеры Косточки [7] соответствуют произвольным множествам S . Хотя известны микроскопические вариации этих примеров, приводящие к тем же значениям $\text{ex}_{\min}(n; I_4^3)$, с асимптотической точки зрения турановские графы вида $FDF(\Gamma_K|_{\mathbb{Z}_3 \times S})$ являются единственными известными примерами (предположительно) экстремальных конфигураций. Для лучшего понимания точного смысла последнего утверждения полезно осуществить естественный “пределный переход”, и по этой причине мы откладываем дальнейшее обсуждение до того, как мы приведём необходимый материал из теории алгебр флагов.

2.1 Алгебры флагов

Как было обещано во введении, мы не пытаемся дать замкнутое изложение общей теории, развитой в работе [13]. Наша единственная цель заключается во введении нескольких новых понятий *в дополнение* к введённым ранее в работе [13] и зафиксировать обозначения (многие из которых приводятся на соответствующих рисунках) для конкретных теорий, интерпретаций, типов, флагов и.т.д., используемых в данной работе.

2.1.1 Дополнительные обозначения

Открытая интерпретация $(U, I) : T_1^{\sigma_1} \rightsquigarrow T_2^{\sigma_2}$ *тотальна* ([13, определение 4]), если релятивизирующий предикат U тождественно истинен: $U(x) \equiv \top$. В настоящей работе рассматриваются только тотальные интерпретации, и по этой причине мы систематически опускаем предикат U . Тотальная интерпретация I *глобальна*, если, кроме этого, типы σ_1 и σ_2 тривиальны:

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (глобальные интерпретации были рассмотрены в [13, §2.3.3]). Для всякой глобальной интерпретации $I : T_1 \rightsquigarrow T_2$ и типа σ теории T_2 естественным образом определена индуцированная интерпретация $I^\sigma : T_1^{I(\sigma)} \rightsquigarrow T_2^\sigma$.

Любая тотальная интерпретация $I : T_1^{\sigma_1} \rightsquigarrow T_2^{\sigma_2}$ определяет гомоморфизм алгебр $\pi^I : \mathcal{A}^{\sigma_1}[T_1] \longrightarrow \mathcal{A}^{\sigma_2}[T_2]$ ([13, теорема 2.6]). Для глобальной интерпретации I и типа σ теории T_2 , $\pi^{(I^\sigma)}$ будет сокращаться до $\pi^{I, \sigma}$. Для произвольной тотальной интерпретации $I : T_1^{\sigma_1} \rightsquigarrow T_2^{\sigma_2}$ и $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{\sigma_2}[T_2], \mathbb{R})$ сквозной гомоморфизм $\phi\pi^I \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{\sigma_1}[T_1], \mathbb{R})$ будет обозначаться через $\phi|_I$. Аналогичным образом, для $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ и инъективного отображения $\eta : [k'] \longrightarrow [\sigma]$ гомоморфизм $\phi\pi^{\sigma, \eta} \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ ([13, §2.3.1]) будет обозначаться через $\phi|_\eta$. Обычно мы будем записывать отображение η в виде таблицы его значений $[\eta(1), \dots, \eta(k')]$ и, помимо этого, при $k' = 1$ квадратные скобки будут опускаться. Например, для $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ $\phi|_2$ означает сквозной гомоморфизм $\phi\pi^{\sigma, 2} \stackrel{\text{def}}{=} \phi\pi^{\sigma, \eta}$, где $\eta : [1] \longrightarrow [\sigma]$ задаётся правилом $\eta(1) = 2$.

Для $f, g \in \mathcal{A}^\sigma$ $f \leq_\sigma g$ означает ([13, определение 6]), что $\phi(f) \leq \phi(g)$ для всякого $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$. Эти обозначения следующим образом обобщаются на случай произвольных вещественных функций $g_1, \dots, g_\ell, h_1, \dots, h_\ell : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}$, пропозициональной формулы $A(p_1, \dots, p_\ell)$ и элементов $f_1, \dots, f_t \in \mathcal{A}^\sigma$: $A(g_1(f_1, \dots, f_t) \geq h_1(f_1, \dots, f_t), \dots, g_\ell(f_1, \dots, f_t) \geq h_\ell(f_1, \dots, f_t))$ по определению означает, что

$$A(g_1(\phi(f_1), \dots, \phi(f_t)) \geq h_1(\phi(f_1), \dots, \phi(f_t)), \dots, g_\ell(\phi(f_1), \dots, \phi(f_t)) \geq h_\ell(\phi(f_1), \dots, \phi(f_t)))$$

истинно для любого выбора $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$.

Для невырожденного типа σ_0 размера k_0 , гомоморфизма $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{\sigma_0}, \mathbb{R})$ и расширения (σ, η) типа σ_0 со свойством $\phi((\sigma, \eta)) > 0$ через $S^{\sigma, \eta}(\phi)$ мы будем обозначать носитель вероятностной меры $\mathbf{P}^{\sigma, \eta}$ [13, определение 8]. Таким образом, $S^{\sigma, \eta}(\phi)$ – это минимальное замкнутое подмножество $\text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ со свойством $\mathbf{P}[\phi^{\sigma, \eta} \in S^{\sigma, \eta}(\phi)] = 1$, и, как всегда, в случае, когда $\sigma_0 = 0$ тривиален, η будет опускаться.

2.1.2 Имена

В настоящем разделе мы приводим список обозначений для большинства конкретных объектов, используемых в нашей работе.

Теории.

T_{Turan} – теория 3-графов без индуцированных копий I_4^3 .
 T_{FDF} – теория орграфов без индуцированных копий $\vec{C}_4$.
 T_{Graph} – теория обыкновенных (простых, неориентированных) графов.

Для произвольной теории T обозначим через T^* её расширение, полученное добавлением трёх новых одноместных предикатных символов χ^0, χ^1, χ^2 вместе с аксиомами

$$\bigvee_{a \in \mathbb{Z}_3} \chi^a(v), \quad \neg(\chi^a(v) \wedge \chi^b(v)) \quad (a \neq b \in \mathbb{Z}_3).$$

Иными словами, мы расширяем теорию T новой $\mathbb{Z}_3$ -раскраской χ её вершин, априори никак не связанной с задаваемой T исходной структурой.

Интерпретации.

Общая теория изложена в [13, §2.3].

$\text{FDF} : T_{\text{Turan}} \rightsquigarrow T_{\text{FDF}}$ – определяемая естественным образом *интерпретация Фон-Дер-Флаасса*. Именно, обозначая (единственный) предикатный символ теории T_{Turan} через E_3 , а предикатный символ теории T_{FDF} через E , мы полагаем

$$\begin{aligned} \text{FDF}(E_3)(v_0, v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} & \bigwedge_{a \neq b \in \mathbb{Z}_3} (v_a \neq v_b) \wedge \left(\bigvee_{a \in \mathbb{Z}_3} (E(v_a, v_{a+1}) \wedge E(v_a, v_{a-1})) \right. \\ & \left. \vee \bigvee_{a \in \mathbb{Z}_3} (\neg E(v_a, v_{a+1}) \wedge \neg E(v_a, v_{a-1}) \wedge \neg E(v_{a-1}, v_a) \wedge \neg E(v_{a+1}, v_a)) \right). \end{aligned}$$

Забывающая ориентацию интерпретация $\text{OE} : T_{\text{Graph}} \rightsquigarrow T_{\text{FDF}}$ определяется очевидным образом. Работая в теории T_{FDF} , мы будем систематически опускать гомоморфизм π^{OE} и для элемента $f \in \mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}]$ писать просто $\pi^{\text{OE}}(f)$ вместо f .

Забывающая раскраску интерпретация $\text{CE}_T : T \rightsquigarrow T^*$ также имеет очевидное определение. Нижний индекс T в CE_T будет опускаться в тех случаях, когда теория T ясна из контекста.

Обобщение $\text{OE}^* : T_{\text{Graph}}^* \rightsquigarrow T_{\text{FDF}}^*$ интерпретации OE также вполне очевидно (на $\mathbb{Z}_3$ -раскраске эта нтепретация действует тождественным образом). Как и ранее, для $f \in \mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}]$ элемент $\pi^{\text{OE}^*} \pi^{\text{CE}_{T_{\text{Graph}}}}(f) = \pi^{\text{CE}_{T_{\text{FDF}}}} \pi^{\text{OE}}(f)$ будет записываться просто в виде f .

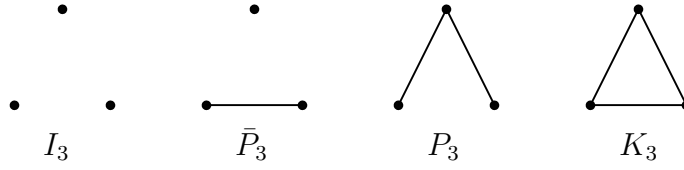


Рис. 2: Простые графы на 3 вершинах

Все введённые до сих пор интерпретации являются глобальными. Нам понадобится ещё одна (чрезвычайно важная для всего доказательства) неглобальная интерпретация, однако мы рассмотрим её чуть позднее, после введения ряда необходимых обозначений.

Модели, типы и флаги.

В любой теории T через 0 обозначается тривиальный тип размера 0. В вершинно-однородных (см. [13, определение 11]) теориях T_{Turan} , T_{FDF} , T_{Graph} через 1 обозначается единственный тип размера 1.

$$T_{\text{Turan}}$$

$\rho_3 \in \mathcal{M}_3[T_{\text{Turan}}]$ – модель на трёх вершинах с единственным ребром.

$$T_{\text{Graph}}$$

$\mathcal{M}_2[T_{\text{Graph}}]$ состоит из двух элементах: ρ (ребро) и ν (не-ребро).

$|\mathcal{M}_3[T_{\text{Graph}}]| = 4$. Модели на трёх вершинах вместе с присвоенными им именами перечислены на рис. 2.

E – тип размера 2, являющийся ребром и N – тип размера 2 с пустым множеством рёбер.

$e \in \mathcal{F}_2^1[T_{\text{Graph}}]$ – это ребро с одной выделенной вершиной. Имеются два различных способа превратить модель $\bar{P}_3$ с рис. 2 в 1-флаг: $\bar{P}_3^{1,c}$ (выделяется изолированная вершина) и $\bar{P}_3^{1,b}$ (выделяется неизолированная вершина). Каждое из двух множеств флагов $\mathcal{F}_3^E[T_{\text{Graph}}]$, $\mathcal{F}_3^N[T_{\text{Graph}}]$ состоит из четырёх элементов; они изображены на рис. 3, 4 соответственно.

$$T_{\text{FDF}}$$

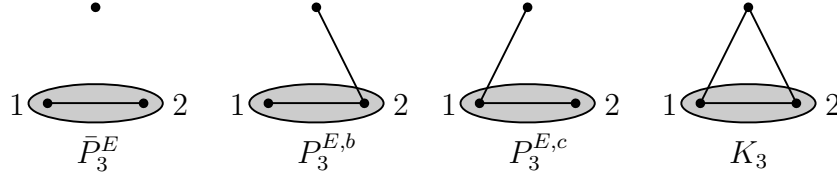


Рис. 3: E -флаги на 3 вершинах

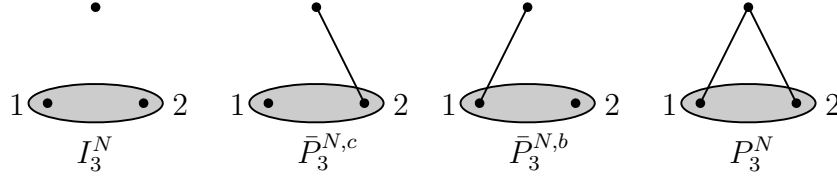


Рис. 4: N -флаги на 3 вершинах

$\alpha \in \mathcal{F}_2^1[T_{\text{FDF}}]$ – это ориентированное ребро с выделенной начальной вершиной. A – тип размера 2 с $E(A) = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, и B – тип размера 2 с $E(B) = \{\langle 2, 1 \rangle\}$.

$$T_{\text{Graph}}^*$$

$p_a \in \mathcal{M}_1[T_{\text{Graph}}^*]$ – одновершинная модель, покрашенная в цвет $a \in \mathbb{Z}_3$. $\rho_a[\nu_a] \in \mathcal{M}_2[T_{\text{Graph}}^*]$ – это ребро [не-ребро соответственно], в котором оба конца покрашены в цвет a . Аналогично, $\rho_{a,b}[\nu_{a,b}] \in \mathcal{M}_2[T_{\text{Graph}}^*]$ – это ребро [не-ребро соответственно], в котором одна вершина покрашена в цвет a , а другая – в b ($a \neq b \in \mathbb{Z}_3$).

$$T_{\text{FDF}}^*$$

Для $a \in \mathbb{Z}_3$ обозначим через (a) тип размера 1, получаемый из модели p_a . Для $a = 1, 2$ через $\alpha_{a,3-a} \in \mathcal{F}_2^{(a)}$ будет обозначаться ориентированное ребро, в котором начальная вершина покрашена в цвет a и является выделенной, а конечная вершина покрашена в цвет $3 - a$ (и является свободной).

N_a – тип размера 2, получаемый из ν_a . В флаге $\vec{P}_3^{N_a} \in \mathcal{F}_3^{N_a}$ единственная свободная вершина v покрашена в цвет $(3 - a)$; этот флаг имеет рёбра $\langle \theta(1), v \rangle, \langle v, \theta(2) \rangle$. Флаг $\vec{P}_3^{N_a,*} \in \mathcal{F}_3^{N_a}$ получается из $\vec{P}_3^{N_a}$ обращением ориентации рёбер.

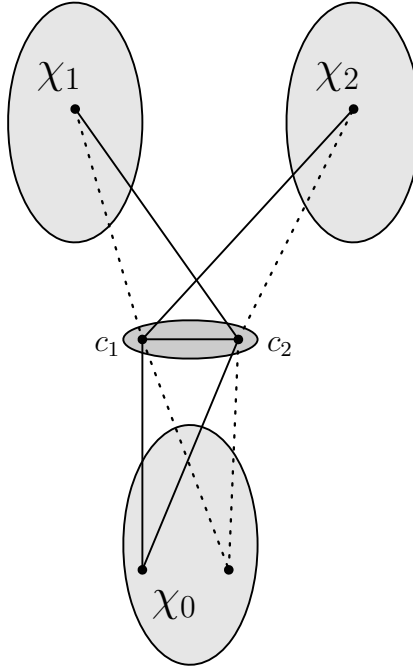


Рис. 5: Интерпретация C

Интерпретации C, OC

Одним из наиболее важных инструментов, используемых в настоящей работе, является (тотальная) интерпретация $C : T_{\text{Graph}}^* \rightsquigarrow T_{\text{Graph}}^E$. На теории T_{Graph} эта интерпретация действует тождественно, а $\mathbb{Z}_3$ -раскраска χ определяется по выделенному ребру (c_1, c_2) в соответствии с рис. 5 (пунктирные линии означают отсутствие ребра). Более формально, предикатный символ $E(v, w)$ теории T_{Graph} интерпретируется сам собой, а новые одноместные символы χ_0, χ_1, χ_2 интерпретируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} C(\chi_0)(v) &\stackrel{\text{def}}{=} (E(c_1, v) \equiv E(c_2, v)) \\ C(\chi_1)(v) &\stackrel{\text{def}}{=} v \neq c_1 \wedge E(c_2, v) \wedge \neg E(c_1, v) \\ C(\chi_2)(v) &\stackrel{\text{def}}{=} v \neq c_2 \wedge E(c_1, v) \wedge \neg E(c_2, v). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эта конструкция хорошо согласуется с введением ориентации. Иными словами мы можем определить тотальную интерпретацию $OC : T_{\text{FDF}}^* \rightsquigarrow$

T_{FDF}^A , сохраняющая рёбра и их ориентацию и вводящую $\mathbb{Z}_3$ -раскраску аналогично (1), полностью игнорируя при этом ориентацию на рёбрах (формально следует везде заменить предикатный символ $E(v, w)$ на дизъюнкцию $E(v, w) \vee E(w, v)$). Имеет место следующая коммутативная диаграмма интерпретаций (и, следовательно, индуцированных ими гомоморфизмов):

$$\begin{array}{ccc} T_{\text{Graph}}^* & \xrightarrow{\text{C}} & T_{\text{Graph}}^E \\ \text{OE}^* \downarrow & & \downarrow \text{OE}^A \\ T_{\text{FDF}}^* & \xrightarrow{\text{OC}} & T_{\text{FDF}}^A \end{array} \quad (2)$$

2.2 Основные результаты и гипотезы

На языке алгебр флагов обсуждавшиеся выше гипотезы выражаются следующим образом:

Гипотеза 1 ((3, 4)-проблема Турана) $\rho_3 \geq 4/9$.

Гипотеза 2 (гипотеза Фон-Дер-Флаасса) $\pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 4/9$.

Пусть μ – произвольная вероятностная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}$, инвариантная относительно действия симметрической группы S_3 на первой координате. Из такой меры естественным образом (путём замены плотностей на соответствующие интегралы по мере μ , ср. [9]) получается гомоморфизм $\phi_\mu \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}], \mathbb{R})$. Для всякой такой μ имеет место $\phi_\mu|_{\text{FDF}}(\rho_3) = 4/9$, и эти $\phi_\mu|_{\text{FDF}}$ образуют все известные в настоящий момент гомоморфизмы $\psi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{Turan}}], \mathbb{R})$ со свойством $\psi(\rho_3) = 4/9$.

Предложение 2.1 ([1]) $\pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 3/7$.

Теперь мы готовы сформулировать наши основные результаты.

Теорема 2.2 $\pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 7/16$.

Теорема 2.3 а) $\bar{P}_3 = 0 \implies \pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 4/9$.

б) $\rho \geq 2/3 - \epsilon \implies \pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 4/9$, где $\epsilon > 0$ – некоторая абсолютная константа.

3 Простой случай: доказательство теоремы 2.2

В настоящем разделе мы работаем в теории T_{FDF} ; напомним (см. раздел 2.1.2), что с помощью забывающей интерпретации ОЕ мы можем свободно использовать в этой теории все обозначения, введённые ранее для теории T_{Graph} .

Оказывается, что все вычисления упрощаются и становятся более интуитивными после применения аффинного преобразования, заменяющего наиболее часто встречающиеся величины на их *отклонения* от значений, принимаемых в (предположительно) экстремальных конфигурациях. Пусть, в частности,

$$\left. \begin{aligned} \delta &\stackrel{\text{def}}{=} 4/9 - \pi^{\text{FDF}}(\rho_3); \\ \delta_\rho &\stackrel{\text{def}}{=} 2/3 - \rho; \\ \delta_{K_3} &\stackrel{\text{def}}{=} 2/9 - K_3; \\ \delta_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} 1/3 - \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Гипотеза Фон-Дер-Флаасса состоит в доказательстве неравенства $\delta \leq 0$, и для начала мы перепишем δ в следующем виде:

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_{K_3} - \delta_\rho - \bar{P}_3) - 3\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \quad (4)$$

(определение и основные свойства усредняющего оператора $\llbracket \cdot \rrbracket_\sigma$ изложены в [13, §2.2]). Это равенство легко проверяется путём представления обеих частей в виде линейных комбинаций семи орграфов на рис. 1 и сравнения соответствующих коэффициентов.

Отметим, что первый член

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\delta_{K_3} - \delta_\rho - \bar{P}_3) \quad (5)$$

в (4) на самом деле принадлежит (образу) $\mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}]$. Более того, если мы временно отвлечёмся от слагаемого $\bar{P}_3$, этот член соответствует классической задаче оценке снизу числа треугольников в графе с заданным числом рёбер. Давайте вначале попробуем применить простую оценку

$K_3 \geq \rho(2\rho - 1)$ из работы Гудмана [6]. В касательных координатах (3) эта оценка переписывается в виде

$$\delta_{K_3} \leq \frac{5}{3}\delta_\rho - 2\delta_\rho^2, \quad (6)$$

и ввиду того, что $\llbracket \delta_\alpha \rrbracket_1 = \frac{1}{2}\delta_\rho$, подставляя в (4) мы получим

$$\delta \leq \frac{1}{3}\delta_\rho - \delta_\rho^2 - \frac{1}{2}\bar{P}_3 - 3\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \leq \frac{1}{3}\delta_\rho - \frac{7}{4}\delta_\rho^2.$$

Отметим, что этого неравенства уже достаточно для предложения 2.1 (т.е. $\delta \leq \frac{1}{63}$). Кроме этого, отсюда вытекает, что $\delta_\rho \leq 0$ сразу влечёт искомое неравенство $\delta \leq 0$, поэтому в оставшейся части работы мы будем предполагать $\delta_\rho \geq 0$ (т.е. $\rho \leq 2/3$).

Оптимальная нижняя оценка на K_3 как функция ρ в интервале $\rho \in [1/2, 2/3]$ была получена в работе [5] и передоказана другими методами в статьях [14, 11]. Хотя эта оценка сама по себе выглядит не слишком привлекательно: $K_3 \geq \frac{(1-\sqrt{4-6\rho})(2+\sqrt{4-6\rho})^2}{18}$, в касательных координатах (3) она существенно упрощается следующим образом:

$$\delta_\rho \geq 0 \implies \delta_{K_3} \leq \delta_\rho + \frac{\sqrt{6}}{3}\delta_\rho^{3/2}$$

(отметим, что по очевидным причинам эта оценка всё ещё справедлива в интервале $\rho \in [0, 1/2]$, хотя там она и не является оптимальной). Сравнивая с (4), мы заключаем:

$$\delta \leq \frac{\sqrt{6}}{6}\delta_\rho^{3/2} - \bar{P}_3 - 3\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1. \quad (7)$$

Теорема 2.2 легко получается следующим образом:

$$\delta \leq \frac{\sqrt{6}}{6}\delta_\rho^{3/2} - \bar{P}_3 - 3\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \leq \frac{\sqrt{6}}{6}\delta_\rho^{3/2} - \frac{3}{4}\delta_\rho^2 \leq \frac{1}{144}$$

(максимум достигается при $\delta_\rho = 1/6$), или, иными словами, $\pi^{\text{FDF}}(\rho_3) \geq 7/16$.

4 Доказательство основного результата

Нашей отправной точкой служит представление (4), и для начала мы приведём пару примеров, демонстрирующих неизбежные сложности, возникающие при попытках усиления оценки теоремы 2.2 до $\delta \leq 0$.

Заметим, что ни предложение 2.1 ни усиливающая его теорема 2.2 никак не используют отсутствие копий $\vec{C}_4$. Наш первый простой пример показывает, что без использования этого условия дальнейшее продвижение невозможно.

Пример 1 Рассмотрим случайную ориентацию полного сбалансированного двудольного графа. Ей соответствует $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{Orgraph}}], \mathbb{R})$ со свойством $\phi(\pi^{\text{FDF}}(\rho_3)) = 7/16$ (здесь T_{Orgraph} – это теория произвольных орграфов, возможно, содержащих индуцированные копии $\vec{C}_4$). Это равенство легко проверяется непосредственно; можно также просто заметить, что для гомоморфизма ϕ все неравенства, используемые в доказательстве теоремы 2.2, превращаются в точные равенства.

Таким образом, нам следует как-то использовать условие об отсутствии копий $\vec{C}_4$, и, просматривая ещё раз доказательство теоремы 2.2, легко видеть, что единственная оставшаяся лазейка заключается в члене $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1$. Нам следует показать, что при этом условии граф Γ должен быть достаточно нерегулярным (относительно выходящей степени) и, следовательно, член $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1$ должен быть существенно больше, чем тривиальная нижняя оценка $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \geq \frac{1}{4} \delta_\rho^2$ по Коши-Шварцу, использованная в доказательстве теоремы 2.2. Наш второй пример демонстрирует, что даже при отсутствии индуцированных копий $\vec{C}_4$ этот член может иметь порядок лишь $\delta_\rho^{3/2}$ (ср. (7)); в частности, в части доказательства, оперирующей с неориентированными графами, мы никак не можем обойтись простой оценкой Гудмана (6).

Пример 2 Существует $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}], \mathbb{R})$ такой, что $\phi(\bar{P}_3) = 0$ и $\phi(f), \phi(\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1) = \Theta(\phi(\delta_\rho^{3/2}))$.

Как и в разделе 2.2, гомоморфизм ϕ определяется по некоторой вероятностной мере μ на $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}$. Разница состоит в том, что хотя μ и является малым возмущением S_3 -инвариантной меры, сама она на этот раз таковой не является.

Более точно, обозначим через μ лебегову меру на множестве

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [-1/6 + \delta_0/2, 1/6 - \delta_0/2] \cup \{1\} \times [-1/6 - \delta_0/2, 1/6] \cup \{2\} \times [-1/6, 1/6 + \delta_0/2],$$

и пусть $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}], \mathbb{R})$ – соответствующий ей гомоморфизм. Несложное вычисление даёт

$$\phi(\delta_\rho) = \frac{3}{2}\delta_0^2,$$

а также (см. (5))

$$\phi(f) = \frac{3}{4}\delta_0^3. \quad (8)$$

С другой стороны, $\phi(\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1)$ – это математическое ожидание величины $(\alpha[(\mathbf{a}, \mathbf{x})] - 4/9)^2$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выбирается случайным образом из S , а $\alpha[(a, x)]$ – относительная выходящая степень вершины $(a, x) \in S$. Наше множество S , однако, было специально сконструировано таким образом, что $\alpha[(a, x)]$ может отличаться от $4/9$ только при $x \notin [-1/6 + \delta_0/2, 1/6 - \delta_0/2]$ (т.е. на множестве меры $O(\delta_0)$), и само это отличие также оценивается сверху как $O(\delta_0)$. Следовательно, $\phi(\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1) = \Theta(\delta_0^3) = \Theta(\phi(\delta_\rho))^{3/2}$.

Последний пример является чрезвычайно важным для понимания оставшейся части доказательства, так как его стратегия в некотором смысле состоит в том, чтобы показать, что описываемая этим примером ситуация является наихудшей возможной. Вначале мы, работая в теории T_{Graph} , показываем, что из $f \geq 0$ следует, что неориентированный граф, полученный из исходного стиранием ориентации, может быть очень хорошо приближен полным трёхдольным графом, в котором одна из долей имеет плотность $p_0 < 1/3$ такую, что $\delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1/3 - p_0$ удовлетворяет неравенству $\frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - p_0\right)^3 \delta_0^3 \geq f$ (ср. (8)). Эта часть устанавливается в разделе 4.1, и её доказательство существенно использует вычислительные возможности, предоставляемые методом алгебр флагов. После этого мы концентрируем наше внимание на двух оставшихся долях нашего трёхдольного графа и показываем, что, в точности, как в примере 2, индуцированный на эти доли подграф обязан содержать $\Omega(\delta_0)$ вершин относительной выходящей степени существенно меньше δ_0 . Эти вершины и внесут искомый вклад в $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1$ (раздел 4.2).

4.1 Построение хорошей раскраски

В настоящем разделе мы по большей части работаем в теориях T_{Graph} , T_{Graph}^* . Введём ещё одно обозначение в стиле (3):

$$\delta_0 = \frac{1}{3} - p_0.$$

Кроме этого положим

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in \mathbb{Z}_3} \rho_a + \sum_{a \neq b \in \mathbb{Z}_3} \nu_{a,b};$$

этот элемент измеряет качество приближения исходного (неориентированного) графа полным трёхдольным графом, определяемым раскраской χ . Пусть также

$$\tilde{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 + \rho_2 + \nu_{1,2}$$

и

$$\kappa' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \neq b \in \mathbb{Z}_3} \nu_{a,b}. \quad (9)$$

Целью данного раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1 Пусть $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}], \mathbb{R})$ таков, что

$$\phi(f) \geq 0 \quad (10)$$

и либо $\phi(\bar{P}_3) = 0$ либо $\phi(\delta_\rho) \leq 10^{-6}$. Тогда существует $\phi^* \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R})$ с $\phi^*|_{CE} = \phi$ такой, что его ограничение $\psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \phi^*|_{OE^*} \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}^*], \mathbb{R})$ удовлетворяет следующим свойствам.

- а) $\delta_0 \geq 0$;
- б) в случае $\phi(\bar{P}_3) = 0$ выполнено $\kappa = \rho_0$ (и таким образом $\tilde{\kappa} = \kappa' = 0$);
- в) $\delta_0^2 \leq 6\delta_\rho$;
- г) $f + 10^{-5}\kappa \leq \frac{3}{4}\delta_0^3$.

Доказательство. Наша раскраска не будет зависеть от ориентации (иными словами, ψ^* будет полностью определяться ограничением $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \phi|_{\text{OE}}$). С интуитивной точки зрения мы выбираем ребро (c_1, c_2) и $\mathbb{Z}_3$ -раскрашиваем наш граф как показано на рис. 5. (c_1, c_2) выбирается так, чтобы минимизировать плотность κ неправильно раскрашенных пар вершин. После этого мы в случае необходимости переставляем цвета (элемент κ инвариантен относительно любой такой перестановки) так, чтобы добиться того, что 0 является наименее часто встречающимся цветом, что автоматически повлечёт свойство а).

Перейдём теперь к строгому доказательству. Рассмотрим случайный гомоморфизм ϕ^A , базируемый в ϕ [13, определение 10], и выберем то его значение $\phi^A \in S^A(\phi)$, которое:

1. минимизирует $\pi^{\text{OE}, A}(K_3^E)$, если $\phi(\bar{P}_3) = 0$;
2. минимизирует $\pi^{\text{OE}, A}\pi^C(\kappa)$ (см. коммутативную диаграмму (2)), если $\phi(\delta_\rho) \leq 10^{-6}$.

Пусть $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \phi|_{\text{OE}}$ и $\psi^E \stackrel{\text{def}}{=} \phi^A|_{\text{OE}^A} \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^E[T_{\text{Graph}}], \mathbb{R})$. Отметим, что в первом случае ($\phi(\bar{P}_3) = 0$) условие $\phi^A \in S^A(\phi)$ немедленно влечёт

$$\psi^E(\bar{P}_3^E) = \psi^E|_i(\bar{P}_3^{1,b}) = \psi^E|_i(\bar{P}_3^{1,c}) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (11)$$

иными словами, копии $\bar{P}_3$ обязаны отсутствовать даже в тех случаях, когда они содержат одну или две выделенных вершины.

В первом случае мы просто полагаем

$$\phi^* = \phi^A|_{\text{OC}}$$

(см. (2)). Во втором случае мы дополнительно пропускаем $\phi^A|_{\text{OC}}$ через автоморфизм алгебры $\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}^*]$, соответствующий подходящей перестановке цветов с тем, чтобы обеспечить выполнение свойства а) в теореме 4.1.

Обозначим также $\psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \phi^*|_{\text{OE}^*} \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}^*], \mathbb{R})$. Мы утверждаем, что ψ^* удовлетворяет всем четырём сформулированным в теореме 4.1 свойствам.

Свойство а). Во втором случае ($\phi(\delta_\rho) \leq 10^{-6}$) данное свойство непосредственно вытекает из нашей конструкции.

Если $\phi(\bar{P}_3) = 0$, то заметим вначале, что (с учётом (11)) выполнено $\psi^*(\delta_0) = \psi^E(1/3 - K_3^E)$. Далее, в теории T_{Graph} имеет место вычисление

$$\llbracket 1/3 - K_3^E \rrbracket_E = 4f + \frac{7}{3}\bar{P}_3 + 2\llbracket (e - 2/3)^2 \rrbracket_1 \geq 4f,$$

которое в силу $\phi(f) \geq 0$ влечёт $\phi(\llbracket 1/3 - K_3^E \rrbracket_E) \geq 0$ и, следовательно, существует хотя бы одно расширение $\psi^E \in S^E(\psi)$ такое, что

$$\psi^E(K_3^E) \leq 1/3. \quad (12)$$

Согласно [13, теорема 4.1], случайный гомоморфизм ψ^E обладает распределением, являющимся выпуклой комбинацией распределений $\phi^A|_{\text{OE}^A}$ и $\phi^B|_{\text{OE}^B}$. Так как элемент K_3^E симметричен по отношению к перестановке меток двух выделенных вершин, мы заключаем, что все три случайные переменные $\psi^E(K_3^E)$, $\phi^A|_{\text{OE}^A}(K_3^E)$ и $\phi^B|_{\text{OE}^B}(K_3^E)$ обладают идентичным распределением. И поскольку наш ϕ^A по определению минимизирует $\phi^A|_{\text{OE}^A}(K_3^E)$, свойство а) вытекает из (12).

Свойство б) становится очевидным, если приглядеться к рис. 3. Из $\phi(\bar{P}_3) = 0$ и (11) легко вытекает, что единственный ненулевой вклад в $\psi^*(\kappa)$ вносится копиями K_4^E и, следовательно, $\psi^*(\kappa) = \psi^*(\rho_0)$.

Проверка двух оставшихся критических свойств в) и г) сводится к типичному (и довольно громоздкому во втором случае) вычислению в алгебрах флагов, найденному при помощи компьютера. Перед тем, как привести эти вычисления, отметим, что, несмотря на то, что в первом случае мы выбрали гомоморфизм $\phi^A|_{\text{OE}^A}$ минимизирующим величину K_3^E , он тем не менее также минимизирует $\phi^A(\kappa)$ (что совпадает с K_4^E в силу уже доказанного свойства б)). Комбинаторное объяснение этому факту очевидно: ψ соответствует полному k -дольному графу (для некоторого k , возможно, равного бесконечности), и обе величины K_3^E и K_4^E минимизируются одним и тем же множеством рёбер, а именно, рёбрами, соединяющими две доли максимального размера. Мы опускаем простое строгое доказательство.

Свойство в). Отметим, что $\psi^*(\kappa) = \psi^E(\pi^C(\kappa))$ (ввиду того, что κ инвариантен относительно автоморфизмов, соответствующих перестановкам цветов). С другой стороны, в силу определяющего свойства [13, определение 10] имеем

$$\mathbf{E}[\psi^E(\pi^C(\kappa))] = \frac{\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E}{\psi(\rho)}.$$

Так как $\psi^E \in S^E(\psi)$ минимизирует $\pi^C(\kappa)$ (мы снова используем тот факт, что $\pi^C(\kappa) \in \mathcal{F}_3^E[T_{\text{Graph}}]$ инвариантен относительно перестановки цветов), мы заключаем, что

$$\psi(\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E) \geq \psi^*(\kappa)\psi(\rho).$$

Поднимая элементы $\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E$ и ρ в алгебру $\mathcal{A}^0[T_{\text{Graph}}^*]$ с помощью забывающей интерпретации, мы можем упростить обозначения и просто сказать, что гомоморфизм ψ^* удовлетворяет неравенству

$$\pi^{\text{CE}}(\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E) \geq \kappa \cdot \pi^{\text{CE}}(\rho). \quad (13)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{9}(1 - 9(p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2)^2) \\ &= (\delta_0^2 + \frac{1}{3}(p_1 - p_2)^2)(1 + 3(p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2)) \geq \delta_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Определим также элемент $f_2 \in \mathcal{A}_4^0[T_{\text{Graph}}]$ через

$$f_2 \stackrel{\text{def}}{=} 4(\llbracket e^2 \rrbracket_1 - \rho^2) + \llbracket (P_3^N - 2I_3^N)^2 \rrbracket_N \geq 0. \quad (15)$$

Тогда неравенство в свойстве в) будет следовать из (10), (13) (14), (15) и следующего неравенства:

$$f_1 + 2(\pi^{\text{CE}}(\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E) - \kappa \cdot \pi^{\text{CE}}(\rho)) + 20\pi^{\text{CE}}(f) + 2\pi^{\text{CE}}(f_2) \leq 6\pi^{\text{CE}}(\delta_\rho). \quad (16)$$

(16), в свою очередь, проверяется непосредственным вычислением коэффициентов в разложении обеих частей по моделям $\mathcal{A}_4^0[T_{\text{Graph}}^*]$ (их всего 357 штук). С целью сокращения этой работы можно отметить, что лишь один член в (16) зависит от обеих структур сразу и переписать его в виде

$$\kappa\pi^{\text{CE}}(\rho) \geq \frac{1}{2}f_1 + \pi^{\text{CE}}(\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E + 10f + f_2 - 3\delta_\rho). \quad (17)$$

Заметим, что обе части в этом неравенстве не зависят от перестановок цветов.

На рис. 6 затабулированы значения $\frac{1}{2}f_1$ на моделях из $\mathcal{A}_4^0[T_{\text{Graph}}^*]$ для всех возможных раскрасок χ (здесь $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ — произвольные попарно различные цвета).

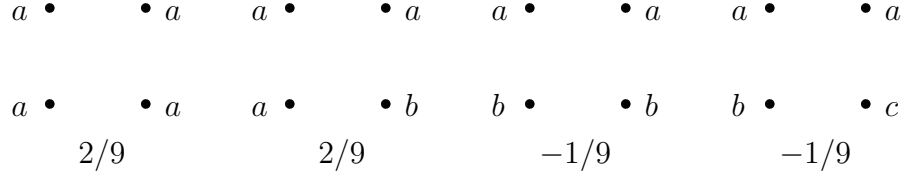


Рис. 6: Значения $\frac{1}{2}f_1$

Аналогичным образом, на рис. 7 указаны значения элемента $\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E + 10f + f_2 - 3\delta_\rho \in \mathcal{A}_4^0[T_{\text{Graph}}]$. Неравенство (17) по существу означает, что если мы произвольно совместим первую или вторую картинку на рис. 6 с третьей или четвёртой на рис. 7 (все остальные случаи тривиальны ввиду того, что сумма ко.эффициентов неотрицательна), то для по крайней мере двух рёбер дополнительная к ним пара вершин вносит свой вклад в κ . Это легко проверить непосредственно.

Свойство г). Образует элемент

$$\left. \begin{aligned}
 f_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4}\delta_0^3 - f + \frac{87}{40}\kappa'\delta_\rho - \frac{1}{39240}\kappa \\
 &\quad - \frac{43}{160}(\pi^{\text{CE}}(\llbracket \pi^C(\kappa) \rrbracket_E) - \kappa \cdot \pi^{\text{CE}}(\rho)) \\
 &\leq \frac{3}{4}\delta_0^3 - f + \frac{87}{40}\kappa'\delta_\rho - 2 \cdot 10^{-5}\kappa.
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Мы утверждаем, что $f_3 \geq 0$; прежде, чем приступить к доказательству этого факта, давайте убедимся, что из него в самом деле вытекает свойство г). Единственный проблематичный член в (18) – это $\frac{87}{40}\kappa'\delta_\rho$.

Если $\phi(\bar{P}_3) = 0$, то $\psi^*(\kappa') = 0$ в силу уже доказанного свойства б), и этот член просто обращается в 0. С другой стороны, при $0 \leq \delta_\rho \leq 10^{-6}$ мы имеем $\frac{87}{40}\kappa'\delta_\rho \leq \frac{87}{40}\kappa\delta_\rho \leq 10^{-5}\kappa$, так что $f_3 \geq 0$ всё ещё влечёт свойство г).

Наше доказательство неравенства $f_3 \geq 0$ сугубо вычислительное и представляет из себя достаточно хорошее рациональное приближение к результату нумерического вычисления соответствующей задачи положи-

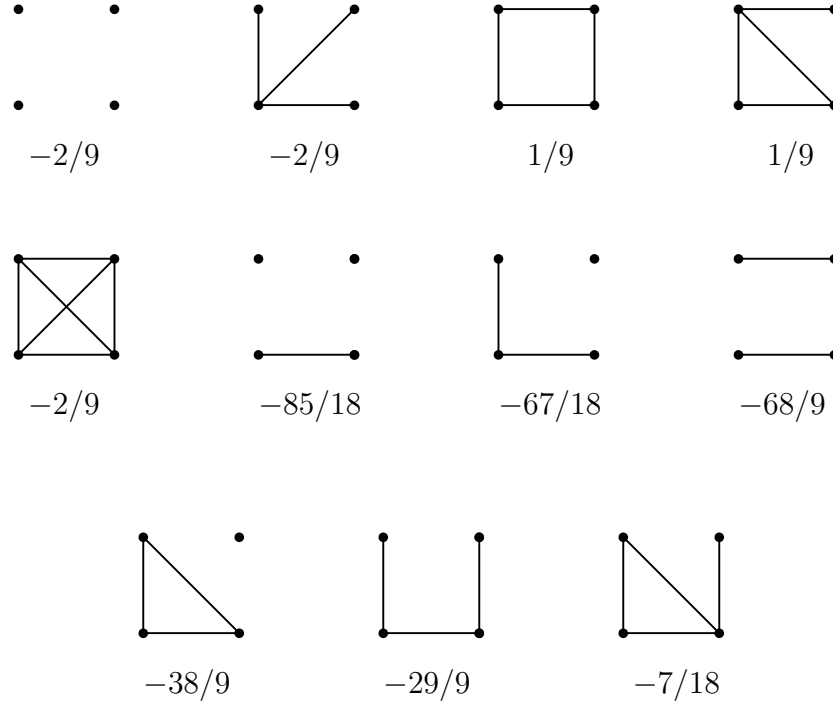


Рис. 7: Член, соответствующий T_{Graph}

тельно полуопределённого программирования. Именно,

$$f_3 \geq \delta_0 p_0 \left(\frac{9}{4} (p_1 - p_2)^2 + \frac{491}{654} \kappa \right) + \frac{1}{5232} \sum_{i=1}^8 \llbracket Q_i(\vec{g}_i) \rrbracket_{\sigma_i}, \quad (19)$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_8$ – некоторые типы, $\vec{g}_i = (g_{i1}, \dots, g_{id_i})$ – кортежи элементов из $\mathcal{A}^{\sigma_i}$, и Q_i – положительно полуопределённые целочисленные квадратичные формы, заданные приводимыми ниже положительно полуопределёнными матрицами M_i размера $(d_i \times d_i)$. Более точно, пусть $\sigma_1 = \sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $d_1 = 4$, $\vec{g}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\nu_{12}, \nu_{01} + \nu_{02}, \rho_1 + \rho_2, \rho_0)$ и

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 6549 & 5619 & -598 & -1468 \\ 5619 & 7868 & -832 & -2094 \\ -598 & -832 & 99 & 150 \\ -1468 & -2094 & 150 & 1406 \end{bmatrix}.$$

$d_2 = 3$, $\vec{g}_2 = (\nu_2 - \nu_1 - \rho_{02} + \rho_{01}, \nu_{02} - \nu_{01}, \rho_2 - \rho_1)$ и

$$M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1308 & -598 & -209 \\ -598 & 279 & 95 \\ -209 & 95 & 39 \end{bmatrix}.$$

Все оставшиеся типы $\sigma_3, \dots, \sigma_8$ имеют размер 2 и получаются из моделей $\rho_0, \nu_{12}, \rho_1, \nu_{01}, \rho_2, \nu_{02}$ соответственно. Мы предполагаем, что в несимметричных типах $\sigma_4, \sigma_6, \sigma_8$ номер 1 присваивается вершине с меньшим (в порядке $0 < 1 < 2$) цветом. $d_i = 12$ ($3 \leq i \leq 8$), и $\vec{g}_i$ перечисляет все флаги из $\mathcal{F}_3^{\sigma_i}$ в некотором специальном порядке. Этот порядок задаётся следующим способом, одинаковым для всех $3 \leq i \leq 8$.

Для произвольного типа σ размера 2 флаг $F = (M, \theta) \in \mathcal{F}_3^\sigma[T_{\text{Graph}}^*]$ однозначно определяется тройкой $(a, \epsilon_1, \epsilon_2)$ ($a \in \mathbb{Z}_3, \epsilon_i \in \{0, 1\}$), где a – это цвет единственной непомеченной вершины $v \in V(M)$, а $\epsilon_i = 1$ в том и только том случае, когда $(\theta(i), v) \in E(M)$. Мы перечисляем флаги из $\mathcal{F}_3^\sigma$ путём приписывания F номера $j = 1 + 4a + 2\epsilon_1 + \epsilon_2$; при $\sigma = \sigma_i$ это и есть j -й член кортежа $\vec{g}_i$.

Матрицы M_i задаются как

$$M_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 837 & 0 & 0 & 999 & 470 & -222 & -222 & -2 & 470 & -222 & -222 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 999 & 0 & 0 & 1209 & 565 & -267 & -267 & -2 & 565 & -267 & -267 & -2 \\ 470 & 0 & 0 & 565 & 1235 & 1487 & 1487 & 1317 & -697 & -1738 & -1738 & -1320 \\ -222 & 0 & 0 & -267 & 1487 & 6186 & -661 & 2209 & -1738 & 778 & -6063 & -2209 \\ -222 & 0 & 0 & -267 & 1487 & -661 & 6186 & 2209 & -1738 & -6063 & 778 & -2209 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 1317 & 2209 & 2209 & 1812 & -1320 & -2209 & -2209 & -1807 \\ 470 & 0 & 0 & 565 & -697 & -1738 & -1738 & -1320 & 1235 & 1487 & 1487 & 1317 \\ -222 & 0 & 0 & -267 & -1738 & 778 & -6063 & -2209 & 1487 & 6186 & -661 & 2209 \\ -222 & 0 & 0 & -267 & -1738 & -6063 & 778 & -2209 & 1487 & -661 & 6186 & 2209 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -1320 & -2209 & -2209 & -1807 & 1317 & 2209 & 2209 & 1812 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2916 & 3470 & 3470 & -4218 & 5950 & 6718 & 4584 & -2394 & 5950 & 4584 & 6718 & -2394 \\ 3470 & 4660 & 4128 & -4644 & 6626 & 7794 & 5940 & -3322 & 6464 & 6048 & 8854 & -2436 \\ 3470 & 4128 & 4660 & -4644 & 6464 & 8854 & 6048 & -2436 & 6626 & 5940 & 7794 & -3322 \\ -4218 & -4644 & -4644 & 9928 & -8710 & -12116 & -6680 & 3014 & -8710 & -6680 & -12116 & 3014 \\ 5950 & 6626 & 6464 & -8710 & 20386 & 19018 & 8784 & -3532 & 7288 & 7046 & 5488 & -6446 \\ 6718 & 7794 & 8854 & -12116 & 19018 & 26982 & 13098 & -2558 & 5488 & 10994 & 10042 & -7774 \\ 4584 & 5940 & 6048 & -6680 & 8784 & 13098 & 8742 & -3386 & 7046 & 8466 & 10994 & -4004 \\ -2394 & -3322 & -2436 & 3014 & -3532 & -2558 & -3386 & 3196 & -6446 & -4004 & -7774 & 880 \\ 5950 & 6464 & 6626 & -8710 & 7288 & 5488 & 7046 & -6446 & 20386 & 8784 & 19018 & -3532 \\ 4584 & 6048 & 5940 & -6680 & 7046 & 10994 & 8466 & -4004 & 8784 & 8742 & 13098 & -3386 \\ 6718 & 8854 & 7794 & -12116 & 5488 & 10042 & 10994 & -7774 & 19018 & 13098 & 26982 & -2558 \\ -2394 & -2436 & -3322 & 3014 & -6446 & -7774 & -4004 & 880 & -3532 & -3386 & -2558 & 3196 \end{bmatrix} \\
M_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 16258 & 8232 & 8232 & 6430 & 3311 & -1191 & -1191 & -3036 & 5681 & -128 & -128 & -3056 \\ 8232 & 10089 & 7010 & 6750 & -3325 & -651 & -1830 & -3146 & 1142 & -1394 & -2761 & -2975 \\ 8232 & 7010 & 10089 & 6750 & -3325 & -1830 & -651 & -3146 & 1142 & -2761 & -1394 & -2975 \\ 6430 & 6750 & 6750 & 5338 & -2682 & -980 & -980 & -2485 & 862 & -1657 & -1657 & -2348 \\ 3311 & -3325 & -3325 & -2682 & 6397 & 485 & 485 & 1219 & 3141 & 2273 & 2273 & 1007 \\ -1191 & -651 & -1830 & -980 & 485 & 411 & -47 & 456 & -164 & 564 & 39 & 431 \\ -1191 & -1830 & -651 & -980 & 485 & -47 & 411 & 456 & -164 & 39 & 564 & 431 \\ -3036 & -3146 & -3146 & -2485 & 1219 & 456 & 456 & 1163 & -424 & 763 & 763 & 1094 \\ 5681 & 1142 & 1142 & 862 & 3141 & -164 & -164 & -424 & 2681 & 753 & 753 & -503 \\ -128 & -1394 & -2761 & -1657 & 2273 & 564 & 39 & 763 & 753 & 1237 & 620 & 679 \\ -128 & -2761 & -1394 & -1657 & 2273 & 39 & 564 & 763 & 753 & 620 & 1237 & 679 \\ -3056 & -2975 & -2975 & -2348 & 1007 & 431 & 431 & 1094 & -503 & 679 & 679 & 1045 \end{bmatrix} \\
M_6 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 25636 & 28299 & 16944 & 7514 & 4589 & 1193 & 7024 & -8103 & 3037 & 450 & 3967 & -11616 \\ 28299 & 35709 & 23685 & 8218 & 7024 & 3660 & 14870 & -11277 & 3761 & 1519 & 5820 & -14960 \\ 16944 & 23685 & 16839 & 5342 & 5547 & 3036 & 13047 & -8122 & 2485 & 945 & 4210 & -10189 \\ 7514 & 8218 & 5342 & 16801 & -6821 & -8516 & -3230 & -1058 & -7132 & -11326 & -3312 & -1718 \\ 4589 & 7024 & 5547 & -6821 & 17546 & 4336 & 19158 & -7091 & 10937 & 4364 & 6238 & -7398 \\ 1193 & 3660 & 3036 & -8516 & 4336 & 6926 & 5276 & -1747 & 4273 & 7886 & 3242 & -2104 \\ 7024 & 14870 & 13047 & -3230 & 19158 & 5276 & 27620 & -10496 & 10353 & 3134 & 7497 & -10810 \\ -8103 & -11277 & -8122 & -1058 & -7091 & -1747 & -10496 & 5243 & -3855 & -802 & -3230 & 6125 \\ 3037 & 3761 & 2485 & -7132 & 10937 & 4273 & 10353 & -3855 & 7738 & 5140 & 4274 & -4235 \\ 450 & 1519 & 945 & -11326 & 4364 & 7886 & 3134 & -802 & 5140 & 9786 & 3345 & -1212 \\ 3967 & 5820 & 4210 & -3312 & 6238 & 3242 & 7497 & -3230 & 4274 & 3345 & 2958 & -3730 \\ -11616 & -14960 & -10189 & -1718 & -7398 & -2104 & -10810 & 6125 & -4235 & -1212 & -3730 & 7536 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_7^{\text{def}} &= \begin{bmatrix}
16258 & 8232 & 8232 & 6430 & 5681 & -128 & -128 & -3056 & 3311 & -1191 & -1191 & -3036 \\
8232 & 10089 & 7010 & 6750 & 1142 & -1394 & -2761 & -2975 & -3325 & -651 & -1830 & -3146 \\
8232 & 7010 & 10089 & 6750 & 1142 & -2761 & -1394 & -2975 & -3325 & -1830 & -651 & -3146 \\
6430 & 6750 & 6750 & 5338 & 862 & -1657 & -1657 & -2348 & -2682 & -980 & -980 & -2485 \\
5681 & 1142 & 1142 & 862 & 2681 & 753 & 753 & -503 & 3141 & -164 & -164 & -424 \\
-128 & -1394 & -2761 & -1657 & 753 & 1237 & 620 & 679 & 2273 & 564 & 39 & 763 \\
-128 & -2761 & -1394 & -1657 & 753 & 620 & 1237 & 679 & 2273 & 39 & 564 & 763 \\
-3056 & -2975 & -2975 & -2348 & -503 & 679 & 679 & 1045 & 1007 & 431 & 431 & 1094 \\
3311 & -3325 & -3325 & -2682 & 3141 & 2273 & 2273 & 1007 & 6397 & 485 & 485 & 1219 \\
-1191 & -651 & -1830 & -980 & -164 & 564 & 39 & 431 & 485 & 411 & -47 & 456 \\
-1191 & -1830 & -651 & -980 & -164 & 39 & 564 & 431 & 485 & -47 & 411 & 456 \\
-3036 & -3146 & -3146 & -2485 & -424 & 763 & 763 & 1094 & 1219 & 456 & 456 & 1163
\end{bmatrix} \\
M_8^{\text{def}} &= \begin{bmatrix}
25636 & 28299 & 16944 & 7514 & 3037 & 450 & 3967 & -11616 & 4589 & 1193 & 7024 & -8103 \\
28299 & 35709 & 23685 & 8218 & 3761 & 1519 & 5820 & -14960 & 7024 & 3660 & 14870 & -11277 \\
16944 & 23685 & 16839 & 5342 & 2485 & 945 & 4210 & -10189 & 5547 & 3036 & 13047 & -8122 \\
7514 & 8218 & 5342 & 16801 & -7132 & -11326 & -3312 & -1718 & -6821 & -8516 & -3230 & -1058 \\
3037 & 3761 & 2485 & -7132 & 7738 & 5140 & 4274 & -4235 & 10937 & 4273 & 10353 & -3855 \\
450 & 1519 & 945 & -11326 & 5140 & 9786 & 3345 & -1212 & 4364 & 7886 & 3134 & -802 \\
3967 & 5820 & 4210 & -3312 & 4274 & 3345 & 2958 & -3730 & 6238 & 3242 & 7497 & -3230 \\
-11616 & -14960 & -10189 & -1718 & -4235 & -1212 & -3730 & 7536 & -7398 & -2104 & -10810 & 6125 \\
4589 & 7024 & 5547 & -6821 & 10937 & 4364 & 6238 & -7398 & 17546 & 4336 & 19158 & -7091 \\
1193 & 3660 & 3036 & -8516 & 4273 & 7886 & 3242 & -2104 & 4336 & 6926 & 5276 & -1747 \\
7024 & 14870 & 13047 & -3230 & 10353 & 3134 & 7497 & -10810 & 19158 & 5276 & 27620 & -10496 \\
-8103 & -11277 & -8122 & -1058 & -3855 & -802 & -3230 & 6125 & -7091 & -1747 & -10496 & 5243
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Нам нечего здесь добавить к тому, что уже было сказано выше: эти матрицы получены из результата нумерического вычисления соответствующей задачи положительно полуопределённого программирования. (19) может быть проверено путём вычисления коэффициентов при всех 357 моделях из $\mathcal{A}_4^0[T_{\text{Graph}}^*]$. Единственное заслуживающее внимание наблюдение состоит в том, что неравенство (19) инвариантно относительно инволюции, переставляющей цвета 1 и 2. Соответственно этому, Q_1 и Q_2 представляют симметричную и антисимметричную части соответствующей квадратичной формы (ср. похожее рассуждение в [15, раздел 4]), а в парах (M_5, M_7) и (M_6, M_8) одна матрица получена из другой перестановками строк и столбцов, соответствующей этой инволюции.

Теорема 4.1 доказана. ■

4.2 Вершины малой выходящей степени

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 2.3. Зафиксируем $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}], \mathbb{R})$ такой, что либо $\phi(\bar{P}_3) = 0$ либо $\phi(\delta_\rho) \leq \epsilon$, где $\epsilon \leq 10^{-6}$ – достаточно малая константа. Нам следует показать, что $\phi(\delta) \leq 0$, где δ задаётся формулой (4).

Если $\phi(f) \leq 0$, то всё очевидно. В противном случае мы применяем теорему 4.1 и находим расширение $\phi^* \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R})$ такое, что гомоморфизм $\psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \phi^*|_{\text{OE}^*}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Прежде чем начинать строгое доказательство, нам бы хотелось кратко обсудить его комбинаторную подоплёку. Мы уже построили $\mathbb{Z}_3$ -раскраску нашего орграфа, в которой частота цвета 0 отличается от среднего значения $1/3$ в меньшую сторону на некоторую величину δ_0 (пункт а) теоремы 4.1), достаточно большую по сравнению с f (пункт г)) и такую, что определяемый ей полный трёхдольный (неориентированный) граф “почти совпадает” с исходным после игнорирования ориентации последнего.

В оставшейся части доказательства мы концентрируем наше внимание на подграфе, индуцированном всеми вершинами, покрашенными в цвета 1 и 2. Для начала давайте представим, что $\tilde{\kappa} = 0$ (что, согласно пункту б) теоремы 4.1, заведомо имеет место в простом случае $\phi(\bar{P}_3) = 0$). Тогда этот индуцированный подграф является ориентацией *полного двудольного* графа, не содержащего $\bar{C}_4$ и, стало быть, ациклический. В этом случае он обязан содержать вершину выходящей степени 0; в исходном орграфе эта вершина имеет (относительную) выходящую степень $\leq p_0 = \frac{1}{3} - \delta_0$. Рассуждая по индукции, мы видим, что для всякого x доля вершин с относительной выходящей степенью $\leq \frac{1}{3} - \delta_0 + x$ не ниже, чем x , из чего следует $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \geq \int_0^{\delta_0} (\delta_0 - x)^2 dx = \frac{\delta_0^3}{3}$. Ввиду пункта г) теоремы 4.1, этой оценки уже достаточно для наших целей.

Главная трудность, разумеется, состоит в том, что, вообще говоря, граф, индуцированный на вершины цветов 1 и 2, не обязан быть ни полным двудольным, ни даже просто двудольным. К счастью, согласно пункту г) в теореме 4.1, разница между ним и полным двудольным весьма мала (а именно, не превосходит δ_0^3), и этим обстоятельством мы и намерены воспользоваться. Согласно неравенству Маркова, существует не более $O(\delta_0^{3/2})$ “плохих” вершин (понимаемых как вершины относительной степени $\Omega(\delta_0^{3/2})$) в графе, являющемся симметрической разностью исход-

ного и его χ -аппроксимации), и мы удаляем их из рассмотрения. После этого мы оказываемся в ситуации, когда все вершины имеют крайне малую ($\ll \delta_0$) относительную степень в разностном графе, и единственная остающаяся нетривиальная вещь – это показать, что предыдущее рассуждение (для случая, когда разностный граф пуст) достаточно устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Перейдём теперь к формальному доказательству. Гомоморфизм $\phi^* \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R})$ фиксирован раз и навсегда, поэтому в дальнейших выкладках он будет опускаться, и $\phi^*(f)$ ($f \in A^0[T_{\text{FDF}}^*]$) будет сокращаться до f .

Полагаем

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\tilde{\kappa}},$$

и предположим, что вещественный параметр x удовлетворяет ограничениям

$$7\xi < x \leq \min(p_1, p_2). \quad (20)$$

Для $a \in \{1, 2\}$ пусть

$$\text{Bad}_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{(a)}[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R}) \mid \phi(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})) > \xi \right\}$$

(как и в [13, §4.3], $\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})$ – это сумма всех флагов $F \in \mathcal{F}_2^{(a)}[T_{\text{FDF}}^*]$ с носителем $\tilde{\kappa}$). Полагаем также

$$\text{Bad}_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bad}_a \cup \left\{ \phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{(a)}[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R}) \mid \phi(\alpha_{a,3-a}) < x \right\}.$$

$p_1, p_2 > 0$ согласно (20), поэтому мы вправе рассмотреть случайные гомоморфизмы $(\phi^*)^{(a)}$, базируемые в ϕ^* ; они будут обозначаться просто через ϕ^a . Пусть

$$\begin{aligned} b_a &\stackrel{\text{def}}{=} p_a \cdot \mathbf{P}[\phi^a \in \text{Bad}_a]; \\ b_a(x) &\stackrel{\text{def}}{=} p_a \cdot \mathbf{P}[\phi^a \in \text{Bad}_a(x)]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\tilde{\kappa} = \sum_{a=1}^2 \llbracket \mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa}) \rrbracket_{(a)},$$

что, согласно [13, определение 10], можно переписать в виде

$$\tilde{\kappa} = \sum_{a=1}^2 p_a \cdot \mathbf{E}[\phi^a(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa}))].$$

Отсюда заключаем

$$\tilde{\kappa} \geq \sum_{a=1}^2 p_a \xi \cdot \mathbf{P}[\phi^a(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})) > \xi] = \xi(b_1 + b_2).$$

Таким образом,

$$b_1 + b_2 \leq \frac{\tilde{\kappa}}{\xi} = \xi. \quad (21)$$

Нашей целью является доказательство нижней оценки

$$b_1(x) + b_2(x) \geq x - 6\xi, \quad (22)$$

из которой основной результат будет следовать путём интегрирования по x как уже было объяснено выше.

Если $b_1(x) = p_1$ или $b_2(x) = p_2$, то оценка (22) тривиально вытекает из ограничений (20).

В противном случае замкнутые подмножества $S^{(a)}(\phi^*) \setminus \text{Bad}_a(x) \subseteq \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{(a)}, \mathbb{R})$ непусты, и мы фиксируем значение $\phi^a \in S^{(a)}(\phi^*) \setminus \text{Bad}_a(x)$, минимизирующее $\alpha_{a,3-a}$. Отметим, что $\phi^a(\alpha_{a,3-a}) \geq x$ согласно определению множества $\text{Bad}_a(x)$.

Применим теперь теорему 4.1 из работы [13] к стирающей метки интерпретации $T_{\text{FDF}}^* \rightsquigarrow (T_{\text{FDF}}^*)^{(1)}$ (описанной в [13, §2.3.1]) и гомоморфизму $\phi^1 \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^{(1)}[T_{\text{FDF}}^*], \mathbb{R})$. Мы получим альтернативное описание случайного гомоморфизма ϕ^2 : сперва надо выбрать случайным (относительно некоторого распределения, вид которого не имеет для нас значения) тип σ размера 2 с $\sigma|_a = (a)$ ($a = 1, 2$) и после этого построить $(\phi^1)^{\sigma,1}|_2$. Ввиду того, что $\phi^2 \in S^{(2)}(\phi^\sigma)$ и пространства $\text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ компактны, отсюда вытекает существование типа σ такого, что $\sigma|_a = (a)$ ($a = 1..2$) и $\phi^\sigma \in S^{\sigma,1}(\phi^1)$ со свойствами $\phi^\sigma|_2 = \phi^2$.

Гомоморфизмы ϕ^σ и $\phi^a = \phi^\sigma|_a$ также фиксированы раз и навсегда и по этой причине будут тоже опускаться во всех выкладках.

Обозначим через $F_a = (\Gamma, \theta) \in \mathcal{F}_3^\sigma$ флаг, в котором единственная немеченная вершина $v \in V(\Gamma)$ красится в цвет a , а единственным смежным с ней ребром служит $\langle \theta(3-a), v \rangle$. Тогда

$$F_a \geq \pi^{\sigma,2}(\alpha_{3-a,a}) - \pi^{\sigma,1}(\mu_2^a(\tilde{\kappa})) \geq x - \xi > 0, \quad (23)$$

где мы использовали, что $\phi^a \notin \text{Bad}_a(x)$ ($a = 1, 2$), а также ограничение (20).

Далее, $F_1 F_2 = \frac{1}{2}(G_0 + G_1 + G_2)$, где флаги $G_a = (\Gamma_a, \theta_a) \in \mathcal{F}_4^\sigma$ определяются следующим образом. $V(\Gamma_a) = \{\theta_a(1), \theta_a(2), v_1, v_2\}$, $G_a|_{\{\theta_a(1), \theta_a(2), v_b\}} = F_b$ ($b = 1..2$), а вершины v_1, v_2 независимы в G_0 и содержат ребро $\langle v_{3-a}, v_a \rangle$ в G_a . Отметим, что $G_0 \leq \pi^\sigma(\tilde{\kappa})$, так что

$$F_1 F_2 \leq \frac{1}{2}(G_1 + G_2 + \tilde{\kappa}). \quad (24)$$

Пусть σ_a – тип размера 3, основанный на F_a (более точно, $\sigma_a|_{[1,2]} = \sigma$, а метка 3 присваивается непомеченной вершине). С учётом того, что $\phi^\sigma(F_a) > 0$ (согласно (23)), мы можем образовать случайные расширения $(\phi^\sigma)^{\sigma_a, [1,2]}$ гомоморфизма ϕ^σ , которые будут обозначаться просто через ϕ^{σ_a} . Пусть также $G_a^+ \in \mathcal{F}_4^{\sigma_a}$ получается из $G_a \in \mathcal{F}_3^\sigma$ путём дополнительного присваивания вершине v_a метки 3 (вершины v_{3-a} остаются непомеченными). Тогда

$$\mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+)] = \frac{1}{2} \frac{G_a}{F_a}.$$

Подставляя это равенство в (24), мы получаем

$$F_1 F_2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\kappa} + \sum_a F_a \mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+)].$$

Раскладывая по формуле полной вероятности относительно события $\phi^{\sigma_a}|_3 \in \text{Bad}_a(x)$, получаем оценку

$$\mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+)] \leq F_{3-a} \cdot \mathbf{P}[\phi^{\sigma_a}|_3 \in \text{Bad}_a(x)] + \mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+) | \phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)]$$

(ввиду $G_a^+ \leq \pi^{\sigma_a, [1,2]}(F_{3-a})$, неравенство $\phi^{\sigma_a}(G_a^+) \leq F_{3-a}$ имеет место с вероятностью 1). Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} F_1 F_2 &\leq \frac{1}{2} \tilde{\kappa} + \sum_a F_1 F_2 \mathbf{P}[\phi^{\sigma_a}|_3 \in \text{Bad}_a(x)] \\ &\quad + \sum_a F_a \mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+) | \phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Применяя ещё раз теорему 4.1 из [13] (на этот раз к забывающей интерпретации $T_{\text{FDF}}^* \rightsquigarrow (T_{\text{FDF}}^*)^\sigma$), мы видим, что ϕ^a имеет распределение,

являющееся выпуклой линейной комбинацией распределений $\phi^{\sigma'_a}|_3$, взятой по всем тем $\sigma'_a \in \text{Ext}(\sigma, \eta)$ ($\eta : [2] \rightarrow [3], \eta(i) = i$), для которых $\chi(3) = a$. Рассматривая в частности $\sigma'_a = \sigma_a$, мы заключаем, что

$$F_a \mathbf{P}[\phi^{\sigma_a}|_3 \in \text{Bad}_a(x)] \leq p_a \mathbf{P}[\phi^a \in \text{Bad}_a(x)] = b_a(x).$$

Эти выкладки позволяют нам оценить второй член в правой части (25):

$$F_1 F_2 \leq \frac{1}{2} \tilde{\kappa} + \sum_a F_{3-a} b_a(x) + \sum_a F_a \mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+) | \phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)]. \quad (26)$$

Для оценки оставшегося члена $\mathbf{E}[\phi^{\sigma_a}(G_a^+) | \phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)]$ зафиксируем произвольным образом значение $\phi^{\sigma_a} \in S^{\sigma_a, [1, 2]}(\phi^\sigma)$ со свойством $\phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)$. Из сказанного ранее (и основанного на теореме 4.1 из [13] замечания) непосредственно вытекает, что $\phi^{\sigma_a}|_3 \in S^{(a)}(\phi^*)$. Учитывая способ, которым был определён $\phi^a (= \phi^{\sigma_a}|_a)$, мы заключаем, что $\phi^{\sigma_a}|_3(\alpha_{a, 3-a}) \geq \phi^{\sigma_a}|_a(\alpha_{a, 3-a})$ или, опуская как всегда фиксированный гомоморфизм ϕ^{σ_a} ,

$$\pi^{\sigma_a, 3}(\alpha_{a, 3-a}) \geq \pi^{\sigma_a, a}(\alpha_{a, 3-a}). \quad (27)$$

Далее,

$$G_a^+ \leq \pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a}). \quad (28)$$

Наступило время использовать отсутствие индуцированных копий $\vec{C}_4$; из этого условия вытекает

$$\vec{P}_3^{N_a} \vec{P}_3^{N_a, *} \leq \frac{1}{2} \pi^{N_a}(\tilde{\kappa}). \quad (29)$$

Действительно, во всяком флаге $F = (\Gamma, \theta) \in \mathcal{F}_4^{N_a}$, $V(\Gamma) = \{\theta(1), \theta(2), v, w\}$ с $F|_{\{\theta(1), \theta(2), v\}} = \vec{P}_3^{N_a}$ и $F|_{\{\theta(1), \theta(2), w\}} = \vec{P}_3^{N_a, *}$ вершины v и w не могут быть независимыми (в противном случае мы получили бы копию $\vec{C}_4$), и поэтому пара (v, w) вносит свой вклад $\tilde{\kappa}$.

Итак, $\vec{P}_3^{N_a} + \vec{K}_{2,1}^{N_a} \leq \pi^{N_a, 1}(\alpha_{a, 3-a})$. Аналогичным образом, $\vec{P}_3^{N_a, *} + \vec{K}_{2,1}^{N_a} \geq \pi^{N_a, 2}(\alpha_{a, 3-a}) - \pi^{N_a, 1}(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa}))$. Вычитая первое неравенство из второго,

$$\vec{P}_3^{N_a, *} - \vec{P}_3^{N_a} \geq \pi^{N_a, 2}(\alpha_{a, 3-a}) - \pi^{N_a, 1}(\alpha_{a, 3-a}) - \pi^{N_a, 1}(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})).$$

Поднимем полученное неравенство в алгебру $\mathcal{A}^{\sigma_a}$, используя гомоморфизм алгебр $\pi^{\sigma_a, [a, 3]}$. Используя (27) и тот факт, что $\phi^a \notin \text{Bad}_a$, мы видим, что

$$\pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a, *}) \geq \pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a}) - \xi.$$

Поднимая в эту алгебру также неравенство (29), мы заключаем, что $\pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a}) \cdot (\pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a}) - \xi) \leq \frac{1}{2}\tilde{\kappa}$, из чего вытекает $\pi^{\sigma_a, [a, 3]}(\vec{P}_3^{N_a}) \leq \xi + \sqrt{\tilde{\kappa}/2} \leq 2\xi$. Сравнивая это неравенство с (28), мы убеждаемся, что для всякого $\phi^{\sigma_a} \in S^{\sigma_a, [1, 2]}(\phi^\sigma)$ с $\phi^{\sigma_a}|_3 \notin \text{Bad}_a(x)$ имеет место $\phi^{\sigma_a}(G_a^+) \leq 2\xi$.

Итак, оценка (26) влечёт

$$F_1 F_2 \leq \frac{1}{2}\tilde{\kappa} + \sum_a F_{3-a} b_a(x) + 2\xi \sum_a F_a = \frac{1}{2}\tilde{\kappa} + \sum_a F_{3-a} (b_a(x) + 2\xi).$$

Без ограничения общности можно предположить, что $F_1 \geq F_2$. Тогда в качестве следующего шага получаем $F_1 F_2 \leq \frac{1}{2}\tilde{\kappa} + F_1(b_1(x) + b_2(x) + 4\xi)$. Разделив это неравенство на F_1 , и, приняв во внимание неравенство (23), мы завершим доказательство (22) в нетривиальном случае $b_1(x) < p_1$, $b_2(x) < p_2$.

Сравнивая (22) с (21) и сверяя результат с определениями множеств Bad_a и $\text{Bad}_a(x)$, мы заключаем, что

$$\sum_a p_a \mathbf{P}[\phi^a(\alpha_{a, 3-a}) < x \wedge \phi^a(\mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})) \leq \xi] \geq x - 7\xi. \quad (30)$$

С другой стороны, снова применяя теорему 4.1 из [13], на этот раз к интерпретации, забывающей раскраску, мы видим, что распределение случайной величины $\phi^1(\alpha)$ является выпуклой линейной комбинацией распределений $\phi^a \pi^{\text{CE}, (a)}(\alpha)$ ($a \in \mathbb{Z}_3$) с весами p_a . Кроме того,

$$\pi^{\text{CE}, (a)}(\alpha) \leq \alpha_{a, 3-a} + \mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa}) + p_0 = \frac{1}{3} - (\delta_0 - \alpha_{a, 3-a} - \mu_2^{(a)}(\tilde{\kappa})).$$

Таким образом, из (30) вытекает, что для всякого $x \in (7\xi, \min(p_1, p_2)]$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}[1/3 - \phi^1(\alpha) > \delta_0 - x - \xi] \geq x - 7\xi.$$

Интегрируя это неравенство от 7ξ до $\min(p_1, p_2, \delta_0 - \xi)$, мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 &= \mathbf{E}[(1/3 - \phi^1(\alpha))^2] \geq \int_{7\xi}^{\min(p_1, p_2, \delta_0 - \xi)} (\delta_0 - x - \xi)^2 dx \\ &= \frac{1}{3}((\delta_0 - 8\xi)^3 - \max(0, \delta_0 - \xi - p_1, \delta_0 - \xi - p_2)^3) \\ &\geq \frac{1}{3}((\delta_0 - 8\xi)^3 - \max(0, p_2 - 2/3, p_1 - 2/3)^3). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Нам осталось рассмотреть патологический случай, когда либо p_1 либо p_2 крайне велики. Для этого нам нужно ещё одно сравнительно простое вычисление в алгебре $\mathcal{A}_3^0[T_{\text{Graph}}^*]$:

$$(p_a - 2/3) \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\rho_0 + \frac{3}{2}p_0p_{3-a} \right) + \pi^{\text{CE}}(f) + (p_a - 2/3)^2 \leq \frac{1}{2}(\kappa - \rho_0).$$

Так как согласно нашему предположению имеет место $\psi(f) \geq 0$, мы получаем, что $(p_a - 2/3) \leq \frac{3}{2}(\kappa - \rho_0)$ и, подставив это неравенство в (31), мы наконец заключаем, что

$$\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \geq \frac{1}{3} \left((\delta_0 - 8\xi)^3 - \frac{27}{4}(\kappa - \rho_0)^3 \right). \quad (32)$$

В простом случае $\psi(\bar{P}_3) = 0$ пункт б) теоремы 4.1 влечёт $\xi = \tilde{\kappa} = \kappa - \rho_0 = 0$ и, следовательно, $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \geq \frac{1}{3}\delta_0^3$. Искомое неравенство $\delta \leq 0$ следует из оценки $f \leq \frac{3}{4}\delta_0^3$, которая в свою очередь вытекает из пункта г) в теореме 4.1.

С другой стороны, ввиду того, что δ_ρ произвольно мало, пункт в) в теореме 4.1 влечёт, что δ_0 также произвольно мало и, следовательно, часть г) влечёт $\tilde{\kappa} \leq \kappa \leq O(\delta_0^3)$. Поэтому из (32) следует $\llbracket \delta_\alpha^2 \rrbracket_1 \geq \delta_0^3 \left(\frac{1}{3} - o(1) \right)$ и, как и в предыдущем случае, $\delta \leq 0$ вытекает (для достаточно малого δ_ρ) из $f \leq \frac{3}{4}\delta_0^3$.

Теорема 2.3 доказана.

5 Заключение

В настоящей статье была решена (3,4)-проблема Турана для естественно-го класса 3-графов, содержащего все примеры Турана-Брауна-Косточки. Теоретически тем самым открывается интересная возможность подступиться к общей задаче с помощью построения обратной (возможно, в некотором ослабленном смысле) интерпретации теории Фон-Дер-Флаасса в теории 3-графов Турана. Пока, впрочем, не вполне ясно, насколько перспективным может оказаться такой подход.

Несколько более лёгкой представляется задача снятия дополнительных ограничений в теореме 2.3. Скорее всего это потребует существенного упрощения нашего доказательства, что может оказаться интересным и само по себе.

Список литературы

- [1] Д. Г. Фон-Дер-Флаасс. Об одном способе построения $(3,4)$ -графов. *Математические Заметки*, 44(4):546–550, 1998.
- [2] W. G. Brown. On an open problem of paul turán concerning 3-graphs. In *Studies in pure mathematics*, pages 91–93. Birkhäuser, 1983.
- [3] D. de Caen. The current status of Turán problem on hypergraphs. In *Extremal Problems for Finite Sets, Visegrád (Hungary)*, volume 3, pages 187–197. Bolyai Society Mathematical Studies, 1991.
- [4] F. Chung and L. Lu. An upper bound for the Turán number $t_3(n, 4)$. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 87:381–389, 1999.
- [5] D. Fisher. Lower bounds on the number of triangles in a graph. *Journal of Graph Theory*, 13(4):505–512, 1989.
- [6] A. W. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *American Mathematical Monthly*, 66(9):778–783, 1959.
- [7] A. V. Kostochka. A class of constructions for Turán’s $(3, 4)$ -problem. *Combinatorica*, 2(2):187–192, 1982.
- [8] L. Lovász and M. Simonovits. On the number of complete subgraphs of a graph, II. In *Studies in pure mathematics*, pages 459–495. Birkhäuser, 1983.
- [9] L. Lovász and B. Szegedy. Limits of dense graph sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(6):933–957, 2006.
- [10] W. Mantel. Problem 28, solution by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.
- [11] V. Nikiforov. The number of cliques in graphs of given order and size. Manuscript, available at <http://arxiv.org/abs/0710.2305v2> (version 2), 2007.
- [12] O. Pikhurko. The minimum size of 3-graphs without a 4-set spanning no or exactly three edges. Manuscript, 2009.

- [13] A. Razborov. Flag algebras. *Journal of Symbolic Logic*, 72(4):1239–1282, 2007.
- [14] A. Razborov. On the minimal density of triangles in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 17(4):603–618, 2008.
- [15] A. Razborov. On 3-hypergraphs with forbidden 4-vertex configurations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(3):946–963, 2010.
- [16] A. F. Sidorenko. What we know and what we do not know about Turán numbers. *Graphs and Combinatorics*, 11:179–199, 1995.
- [17] P. Turán. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 48:436–453, 1941.